1.5 Exercices

Exercice. 1.1 *Soit l'ensemble-contrainte d'un programme linéaire dans $\mathbb{R}^5$ décrit par*

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=8\,,\ x_1+2x_2+x_4=7\,,\ x_2+x_5=3 \\ x_i \geq 0,\ \textit{pour tout } i=1,\ldots,5 \end{cases}$$

1. *Combien y a-t-il de bases ? Quelles sont ces bases et les éléments de base associés ?*
2. *Déterminer toutes les bases admissibles.*

Exercice. 1.2 *Soit Λ_n le simplexe-unité de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire*

$$\Lambda_n = \{x+(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,;\ \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ \ et \ \ x_i \geq 0\}.$$

Déterminer tous les points extrémaux de Λ_n de la manière suivante :

- *décrire Λ_n sous la forme $Ax=b$, avec $A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de rang m et $b\in\mathbb{R}^n$,*
- *faire ensuite la liste des éléments de base admissibles.*

Exercice. 1.3 *Soit C un polyèdre convexe compact de $\mathbb{R}^n$ décrit comme*

$$\{x\in\mathbb{R}^n\,;\ Ax=b, Xx\geq 0\} \ \ avec\ A\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})\ de\ rang\ m\ et\ b\in\mathbb{R}^n.$$

Montrer l'équivalence des deux propositions suivantes :

1. *Chaque élément de C admet au moins m composantes >0,*
2. *Chaque sommet de C admet exactement m composantes >0.*

Exercice. 1.4 *Soient $c=(c_1,\ldots,c_n)\in\mathbb{R}^n$, $a=(a_1,\ldots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et $b_0\in\mathbb{R}$ tels que*

$$b_0>0\ c_j>0 \ \ et \ \ a_j>0\ pour\ tout\ j=1,\ldots,n.$$

On considère le programme linéaire suivant :

$$\begin{cases} \max(c,x) \\ x\in C=\{x\in\mathbb{R}^n\,;\ (a,x)\leq b_0 \ \ et \ \ x_j>0\ pour\ tout\ j=1,\ldots,n\}. \end{cases}$$

1. *Vérifier que C n'est pas vide et est borné,*
2. *Quels sont les points extrémaux de C ?,*
3. *Décrire la face de C constituée de l'ensemble des solutions de (P),*

4. *Illustrer les résultats précédents en prenant* $n=3, a_1=a_2=a_3=b_0=1$, *et en choisissant*

$$c=(0,0,1),\ c=(0,1,1)\ \text{ et }\ c=(1,1,1)\ \text{(successivement).}$$

Exercice. 1.5 *Soit C le polyèdre convexe compact de* $\mathbb{R}^4$ *décrit comme suit :*

$$\begin{cases} x_1+\frac{4}{3}x_2+2x_3=\frac{3}{2} \\ x_2+3x_3=\frac{3}{2} \\ x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_1\geq 0,\ldots,x_4\geq 0. \end{cases}$$

1. *Lister les points extrémaux de C,*
2. *Résoudre le problème linéaire* (P) *suivant*

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min 3x_1+x_2+x_3+x_4 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\in C. \end{cases}$$

Exercice. 1.6 *Considérons le programme linéaire* (P) *dans* $\mathbb{R}^5$ *suivant :*

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\,(c,x) \\ Ax\leq b \\ x\geq 0 \end{cases} \quad \text{où}\quad A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ c=\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

1. *Quel est le problème dual* (D) *de* (P) *?*
2. *Vérifier que* $\overline{x}=(3,2,0,0,1)$ *et* $\overline{y}=(1,2,0)$ *sont solutions de* (P) *et* (D) *respectivement.*

Exercice. 1.7 *Montrer que si le programme linéaire* (P) *suivant :*

$$(P)\ :\ \begin{cases} \max\,(c,x) \\ Ax=b \\ x\geq 0 \end{cases}$$

admet une valeur optimale finie, alors $\overline{x}=0$ *est certainement solution de* (P).

Exercice. 1.8 *Soit le programme linéaire dans* $\mathbb{R}^4$ *suivant :*

$$(P)\ :\ \begin{cases} \min 3x_1+4x_2+x_3+x_4 \\ x_1+x_2+x_3-x_4\geq 2 \\ -2x_1+2x_2+x_3+x_4\geq \alpha \\ x_1\geq 0,\ldots,x_4\geq 0 \end{cases}$$

1. *écrire le problème dual* (D_α) *de* (P_α).
2. *Résoudre* (D_α) *suivant les valeurs de* α*, et en déduire les solutions de* (P_α).